Eesti koolinoorte LIV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Missuguse parameetri a väärtuse korral on paraboolide $f(x)=x^2+3x+4$ ja $g(x)=x^2-x+a$ lõikepunktis nendele paraboolidele tõmmatud puutujate vaheline nurk $\frac{\pi}{4}$?

2. Geomeetrilise jada esimene, teine ja 2008. liige on naturaalarvud. Tõesta, et jada 2007. liige on samuti naturaalarv.

3. Lahenda logaritmvõrrand $3+\dfrac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(17x-\dfrac{4}{x}\right)$.

4. Ühikringi on joonestatud kõõlud $AB=\sqrt{2}$ ja $BC=\frac{10}{7}$. Leia nurga ABC sisepiirkonda jääva ringi osa pindala, kui on teada, et nurk BAC on teravnurk.

5. 2008 kaaluvihti on asetatud ritta. On teada, et suvalise kahe naabervihi massid erinevad täpselt 1 grammi võrra. Tõesta, et kaaluvihid saab jaotada kahele kangkaalu kausile nii, et mõlemal kausil oleks 1004 kaaluvihti ja kangkaal oleks tasakaalus.

LAHENDUSED

1. Lahendus:

Paraboolide lõikepunkti abstsissi leiame võrrandist

$$x^2 + 3x + 4 = x^2 - x + a$$
$$4x = a - 4$$
$$x = \frac{a-4}{4}$$

Järgnevalt arvutame paraboolide puutujate tõusud leitud kohal

1) $f'(x) = 2x + 3$, millest $k_1 = f'\left(\frac{a-4}{4}\right) = 2 \cdot \frac{a-4}{4} + 3 = \frac{a+2}{2}$;

2) $g'(x) = 2x - 1$, millest $k_2 = g'\left(\frac{a-4}{4}\right) = 2 \cdot \frac{a-4}{4} - 1 = \frac{a-6}{2}$.

Kasutame kahe sirge vahelise nurga arvutamise valemit $\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Niisiis

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{a+2}{2} - \frac{a-6}{2}}{1 + \frac{a+2}{2} \cdot \frac{a-6}{2}} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{a+2-a+6}{2}}{1 + \frac{a^2-4a-12}{4}} \Rightarrow 1 = \frac{4}{\frac{a^2-4a-8}{4}}, \text{ millest}$$

$$a^2 - 4a - 24 = 0$$
$$a_{1;2} = 2\left(1 \pm \sqrt{7}\right)$$

Parameetri väärtused $\mathbf{a_{1;2} = 2\left(1 \pm \sqrt{7}\right)}$.

2. Tõestus:

Olgu tegemist geomeetrilise jadaga a_1, a_2, a_3 ..., a_n, ..., mille tegurit tähistame tähega q.

Vastavalt tekstile on a_1, $a_2 = a_1 \cdot q$ ja $a_{2008} = a_1 \cdot q^{2007}$ naturaalarvud. Seega

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q$ on positiivne ratsionaalarv (harilik murd).

Olgu järgnevas $q = \frac{m}{n}$, kus m ja n on naturaalarvud ning murd $\frac{m}{n}$ taandumatu murd. Sellisel juhul

$$a_{2008} = a_1 \cdot q^{2007} = a_1 \cdot \frac{m^{2007}}{n^{2007}}, \text{ kus}$$

$\frac{m^{2007}}{n^{2007}}$ on samuti taandumatu murd. Kui nii, siis $a_1 \vdots n^{2007}$, sest a_{2008} on naturaalarv. Võime kirjutada, et $a_1 = k \cdot n^{2007}$(k - naturaalarv). Niisiis

$$a_{2007} = a_1 \cdot q^{2006} = a_1 \cdot \frac{m^{2006}}{n^{2006}} = \frac{k \cdot n^{2007} \cdot m^{2007}}{n^{2006}} = k \cdot n \cdot m^{2007}, \text{ millest}$$

$$a_{2007} \text{ - naturaalarv.}$$

M. o. t. t.

3. $$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(17x-\frac{4}{x}\right)$$

Teisendame võrrandi vasakut poolt järgnevalt: $3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=3+\log_{\frac{x}{2}}32=$

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$$=\log_{\frac{x}{2}}\frac{x^3}{8}+\log_{\frac{x}{2}}32=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\cdot 32\right)=\log_{\frac{x}{2}}\left(4x^3\right).$$

$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a\left(x_1\cdot x_2\right)$

Võrrand saab kuju

$$\log_{\frac{x}{2}}\left(4x^3\right)=\log_{\frac{x}{2}}\left(17x-\frac{4}{x}\right)$$

Jätame võrrandi poolte eest logaritmid ära.

$$4x^3=17x-\frac{4}{x}\quad\Big|\cdot x$$

$$4x^4=17x^2-4$$

$$4x^4-17x^2+4=0$$

$$x^2=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot4\cdot4}}{2\cdot4}=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=\frac{17\pm15}{8},\text{ millest}$$

1) $x^2=4\Rightarrow x_1=2$ ja $x_2=-2$;

2) $x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_3=\frac{1}{2}$ ja $x_4=-\frac{1}{2}$.

Logaritmi definitsiooni kohaselt saame võrrandi määramispiirkonaks:

$$\begin{cases}x>0\\ x\neq 2\\ 17x-\frac{4}{x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 2\\ \frac{17x^2-4}{x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 2\\ x\cdot\left(x-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)>0\end{cases}$$

$$\frac{2}{\sqrt{17}}<x<2\quad\vee\quad 2<x<+\infty.$$

Võrrandi määramispiirkonda satub vaid lahend $x=\frac{1}{2}$.

<u>Kontroll</u>, kui $x=\frac{1}{2}$.

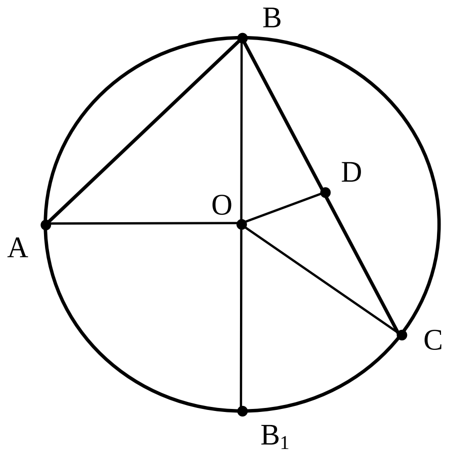
$$vp=3+\frac{1}{\log_{32}0{,}25}=3+\log_{0{,}25}32=3-2{,}5=0{,}5$$

$$pp=\log_{0{,}25}\left(17\cdot0{,}5-\frac{4}{0{,}5}\right)=\log_{0{,}25}(8{,}5-8)=\log_{0{,}25}0{,}5=0{,}5$$

$$vp=pp$$

Võrrandi lahend on $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$.

4. Teeme abistava joonise.



Tõmbame diameetri BB_1 ning raadiused OA ja OC.

1) Esiteks näitame, et punktid A ja C asetsevad teineteisel pool diameetrit BB_1. Kui see poleks nii, siis peaks $\angle BAC$ olema nürinurk, sest diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk. Vastuolu ülesande algtingimustega.

Edasi tükeldame kujundi meile sobivalt ning leiame iga alamkujundi pindala eraldi: kolmnurk AOB, kolmnurk BOC ning sektor AOC.

2) Kolmnurk AOB on täisnurkne kolmnurk, sest tema külgede pikkused on 1, 1 ja $\sqrt{2}$. Seega $S_{\Delta AOB} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

3) Tõmbame võrdhaarsele kolmnurgale BOC kõrguse OD. Olgu kesknurk $\angle BOC = 2\alpha$. Täisnurksest kolmnurgast ODB: $\sin\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{1} = \frac{5}{7}$, millest

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2\cdot\frac{5}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{49}} = \frac{20\sqrt{6}}{49}.$$

Kolmnurga BOC pindala: $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{20\sqrt{6}}{49} = \frac{10\sqrt{6}}{49}$.

4) Kesknurk $\angle AOC = 2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{5}{7} = \frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\frac{5}{7}$ ning sektori AOC pindala: $S_{AOC} = \frac{\angle AOC\cdot 1}{2} = \frac{\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\frac{5}{7}\right)\cdot 1}{2} = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7}$.

Nurga ABC sisepiirkonda jääva ringi osa pindala on

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{20\sqrt{6}}{49} + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7}.}$$

5. *Lahendus 1.* Kõik 2008 kaaluvihti saab jaotada 1004 paariks, nii et igas paaris oleks kaks kõrvutiasetsevat kaaluvihti. Nüüd võtame 502 esimest paari ja asetame esimesele kausile iga paari raskema kaaluvihi, teisele kausile aga iga paari kergema kaaluvihi. Selle tulemusena on esimesel kausil asuvad kaaluvihid kokku 502 grammi võrra raskemad. Ülejäänud paaridega aga tegutseme vastupidi: esimesele kausile asetame iga paari kergema, teisele aga raskema kaaluvihi. Selle tulemusena saab nüüd teine kauss esimesest 502 grammi võrra rohkem massi juurde, ning kangkaal tasakaalustub.

Lahendus 2. Näitame, et ülesande väide kehtib 4 järjestikuse kaaluvihi jaoks. Olgu need kaaluvihid nummerdatud 1, 2, 3, 4. Asetame esimesele kausile paarist (1, 2) raskema, paarist (3, 4) aga kergema kaaluvihi. Teisele kausile asetame ülejäänud kaaluvihid. Selle tulemusena on mõlemal kausil võrdne mass ja kangkaal tasakaalus.

Kuna arv 2008 jagub neljaga, siis kõik kaaluvihid saab jaotada nelikutesse ja rakendada iga neliku jaoks toodud algoritmi.

HINDAMINE

1.	Joonte lõikepunkti abstsissi leidmine	1p
	Puutujate tõusude leidmine	3p
	Võrrandi moodustamine parameetri väärtuse leidmiseks	2p
	Parameetri väärtuse leidmine	1p
		7p

2.	Tähiste valik ja üldliikme valemi teadmine	1p
	Näitamine, et tegur q on ratsionaalarv	1p
	Teguri q esitamine taandumatu murruna	1p
	Tõestuse korrektne lõpuleviimine	4p
		7p

3.	Logaritmi aluse vahetamise valemi rakendamine	1p
	Korrutise logaritmi valemi rakendamine	1p
	Logaritmideta võrrandini jõudmine	1p
	Murdvõrrandi lahendamine	1p
	Võõrlahendite avastamine ja õige lahendi rõhutamine	3p
		7p

4.	Abistav joonis	1p
	Kujundi jaotamine sobivateks alamkujunditeks	1p
	Kolmnurga AOB pindala leidmine	1p
	Kolmnurga BOC pindala leidmine	1p
	Sektori AOC pindala leidmine	2p
	Ülesande korrektne lõpuleviimine	1p
		7p

Märkus. Võimalikud on ka muud kujundi tükeldamised.
Jaotamise ja üksikute jaotuste pindalade leidmise eest kokku anda 5 punkti.
Kui õpilane ei kommenteeri punktide A ja C asetsemist teineteisel pool diameetrit, siis -1 punkt.

5. 1. lahendusmeetod

Idee jaotada kõik kaaluvihid paaridesse, nii et igas paaris oleks kaks kõrvutiasetsevat kaaluvihti	2p
Tõestuse korrektne lõpuleviimine	5p
	7p

2. lahendusmeetod

Algoritm 4 kaaluvihi jaoks	5p
Idee jagada kõik kaaluvihid nelikutesse ja rakendada algoritmi iga neliku jaoks eraldi	2p
	7p

Märkus. Kui esineb idee jaotada kaaluvihid mingisuguselgi viisil paaridesse või nelikutesse, kui edasi pole jõutud, anda 1p.